Variedades de Álgebras de Jordan

María Eugenia Martin
(trabalho em conjunto com I. Kashuba)

Instituto de Matemática e Estatística

22 de julho de 2016

Objetivos

Classificar **geometricamente** as álgebras de Jordan de dimensões pequenas sobre um corpo $\mathbf{k}$ algebricamente fechado de $\operatorname{char} \mathbf{k} \neq 2$.

Descrever a variedade $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$

- dimensão;
- conexidade;
- órbitas;
- álgebras rígidas;
- deformações ;
- componentes irredutíveis.

Descrever a variedade $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$

- dimensão;
- conexidade;
- órbitas;
- álgebras rígidas;
- deformações ;
- componentes irredutíveis.

Descrever a variedade $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$

- dimensão;
- conexidade;
- órbitas;
- álgebras rígidas;
- deformações ;
- componentes irredutíveis.

Descrever a variedade $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$

- dimensão;
- conexidade;
- órbitas;
- álgebras rígidas;
- deformações ;
- componentes irredutíveis.

Descrever a variedade $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$

- dimensão;
- conexidade;
- órbitas;
- álgebras rígidas;
- deformações ;
- componentes irredutíveis.

Descrever a variedade $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$

- dimensão;
- conexidade;
- órbitas;
- álgebras rígidas;
- deformações ;
- componentes irredutíveis.

Resultados na Literatura

- 1964. Gerstenhaber introduziu o conceito de deformação, [4].
- 1968 Nijenhuis e Richardson estenderam a teoria para Lie, [9].
- 1975 Gabriel classificou algébrica e geometricamente Assoc_n^1, $n \leqslant 4$, [3].
- 1979 Mazzola estendeu o trabalho para $n = 5$, [8].
- 1987 Kirillov e Neretin descreveram as componentes de Lie_n, $n \leqslant 6$, [7].

Resultados na Literatura

- 1964. Gerstenhaber introduziu o conceito de deformação, [4].
- 1968 Nijenhuis e Richardson estenderam a teoria para Lie, [9].
- 1975 Gabriel classificou algébrica e geometricamente Assoc_n^1, $n \leqslant 4$, [3].
- 1979 Mazzola estendeu o trabalho para $n = 5$, [8].
- 1987 Kirillov e Neretin descreveram as componentes de Lie_n, $n \leqslant 6$, [7].

Resultados na Literatura

- 1964. Gerstenhaber introduziu o conceito de deformação, [4].
- 1968 Nijenhuis e Richardson estenderam a teoria para Lie, [9].
- 1975 Gabriel classificou algébrica e geometricamente Assoc_n^1, $n \leqslant 4$, [3].
- 1979 Mazzola estendeu o trabalho para $n = 5$, [8].
- 1987 Kirillov e Neretin descreveram as componentes de Lie_n, $n \leqslant 6$, [7].

Resultados na Literatura

- 1964. Gerstenhaber introduziu o conceito de deformação, [4].
- 1968 Nijenhuis e Richardson estenderam a teoria para Lie, [9].
- 1975 Gabriel classificou algébrica e geometricamente Assoc_n^1, $n \leqslant 4$, [3].
- 1979 Mazzola estendeu o trabalho para $n = 5$, [8].
- 1987 Kirillov e Neretin descreveram as componentes de Lie_n, $n \leqslant 6$, [7].

Resultados na Literatura

- 1964. Gerstenhaber introduziu o conceito de deformação, [4].
- 1968 Nijenhuis e Richardson estenderam a teoria para Lie, [9].
- 1975 Gabriel classificou algébrica e geometricamente Assoc_n^1, $n \leqslant 4$, [3].
- 1979 Mazzola estendeu o trabalho para $n = 5$, [8].
- 1987 Kirillov e Neretin descreveram as componentes de Lie_n, $n \leqslant 6$, [7].

Resultados para Álgebras de Jordan

- 2005 Kashuba e Shestakov descreveram as componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}_3$, [5].
- 2006 Kashuba realizou um estudo análogo para $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^1$, $n \leqslant 5$, [6].
- 2008 Ancochea Bermúdez e outros classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_2^{\mathbb{R}}$, [1].
- 2011 classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{orN}_n$, $n \leqslant 4$, [2].
- 2014 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$, [11].
- 2015 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_3^{\mathbb{R}}$, [12].

Resultados para Álgebras de Jordan

- 2005 Kashuba e Shestakov descreveram as componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}_3$, [5].
- 2006 Kashuba realizou um estudo análogo para $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^1$, $n \leqslant 5$, [6].
- 2008 Ancochea Bermúdez e outros classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_2^{\mathbb{R}}$, [1].
- 2011 classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{orN}_n$, $n \leqslant 4$, [2].
- 2014 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$, [11].
- 2015 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_3^{\mathbb{R}}$, [12].

Resultados para Álgebras de Jordan

- 2005 Kashuba e Shestakov descreveram as componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}_3$, [5].
- 2006 Kashuba realizou um estudo análogo para $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^1$, $n \leqslant 5$, [6].
- 2008 Ancochea Bermúdez e outros classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_2^{\mathbb{R}}$, [1].
- 2011 classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{orN}_n$, $n \leqslant 4$, [2].
- 2014 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$, [11].
- 2015 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_3^{\mathbb{R}}$, [12].

Resultados para Álgebras de Jordan

- 2005 Kashuba e Shestakov descreveram as componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}_3$, [5].
- 2006 Kashuba realizou um estudo análogo para $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^1$, $n \leqslant 5$, [6].
- 2008 Ancochea Bermúdez e outros classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_2^{\mathbb{R}}$, [1].
- 2011 classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{orN}_n$, $n \leqslant 4$, [2].
- 2014 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$, [11].
- 2015 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_3^{\mathbb{R}}$, [12].

Resultados para Álgebras de Jordan

- 2005 Kashuba e Shestakov descreveram as componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}_3$, [5].
- 2006 Kashuba realizou um estudo análogo para $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^1$, $n \leqslant 5$, [6].
- 2008 Ancochea Bermúdez e outros classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_2^{\mathbb{R}}$, [1].
- 2011 classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{orN}_n$, $n \leqslant 4$, [2].
- 2014 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$, [11].
- 2015 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_3^{\mathbb{R}}$, [12].

Resultados para Álgebras de Jordan

- 2005 Kashuba e Shestakov descreveram as componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}_3$, [5].
- 2006 Kashuba realizou um estudo análogo para $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^1$, $n \leqslant 5$, [6].
- 2008 Ancochea Bermúdez e outros classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_2^{\mathbb{R}}$, [1].
- 2011 classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{orN}_n$, $n \leqslant 4$, [2].
- 2014 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$, [11].
- 2015 Kashuba e Martin classificaram algébrica e geometricamente $\mathcal{J}\mathrm{or}_3^{\mathbb{R}}$, [12].

- $\mathbf{k}$ denotará um corpo algebricamente fechado de $\operatorname{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Definição

Uma $\mathbf{k}$-álgebra $(\mathcal{J}, \cdot)$ é chamada de **álgebra de Jordan** se seu produto é comutativo e satisfaz a **identidade de Jordan:**

$$(x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x),$$

para todo $x, y \in \mathcal{J}$.

- $\mathcal{J}$ denotará uma $\mathbf{k}$-álgebra de Jordan de dimensão finita.

- $\mathbf{k}$ denotará um corpo algebricamente fechado de $\operatorname{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Definição

Uma $\mathbf{k}$-álgebra $(\mathcal{J}, \cdot)$ é chamada de **álgebra de Jordan** se seu produto é comutativo e satisfaz a **identidade de Jordan:**

$$(x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x),$$

para todo $x, y \in \mathcal{J}$.

- $\mathcal{J}$ denotará uma $\mathbf{k}$-álgebra de Jordan de dimensão finita.

- $\mathbf{k}$ denotará um corpo algebricamente fechado de $\operatorname{char}\mathbf{k} \neq 2$.

Definição

Uma $\mathbf{k}$-álgebra $(\mathcal{J}, \cdot)$ é chamada de **álgebra de Jordan** se seu produto é comutativo e satisfaz a **identidade de Jordan:**

$$(x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x),$$

para todo $x, y \in \mathcal{J}$.

- $\mathcal{J}$ denotará uma $\mathbf{k}$-álgebra de Jordan de dimensão finita.

Deformações

Seja V um **k**-espaço vetorial com base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Queremos introduzir uma estrutura de álgebra de Jordan em V.

Especificamos n^3 **constantes estruturais** $c_{ij}^k \in \mathbf{k}$, tais que:

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k, \text{ para todo } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

A álgebra é comutativa, logo $c_{ij}^k = c_{ji}^k$ e satisfaz a identidade de Jordan, logo:

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^{n} c_{ij}^a \sum_{b=1}^{n} c_{kl}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^{n} c_{kl}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ja}^b c_{ib}^p + \sum_{a=1}^{n} c_{lj}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ki}^b c_{ab}^p - \\ &- \sum_{a=1}^{n} c_{ki}^a \sum_{b=1}^{n} c_{la}^b c_{lb}^p + \sum_{a=1}^{n} c_{kj}^a \sum_{b=1}^{n} c_{il}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^{n} c_{il}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ja}^b c_{kb}^p = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

para todos $i, j, k, l, p \in \{1, \ldots, n\}$.

Deformações

Seja V um **k**-espaço vetorial com base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Queremos introduzir uma estrutura de álgebra de Jordan em V.

Especificamos n^3 **constantes estruturais** $c_{ij}^k \in \mathbf{k}$, tais que:

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k, \text{ para todo } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

A álgebra é comutativa, logo $c_{ij}^k = c_{ji}^k$ e satisfaz a identidade de Jordan, logo:

$$\sum_{a=1}^{n} c_{ij}^a \sum_{b=1}^{n} c_{kl}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^{n} c_{kl}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ja}^b c_{ib}^p + \sum_{a=1}^{n} c_{lj}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ki}^b c_{ab}^p -$$
$$- \sum_{a=1}^{n} c_{ki}^a \sum_{b=1}^{n} c_{la}^b c_{lb}^p + \sum_{a=1}^{n} c_{kj}^a \sum_{b=1}^{n} c_{il}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^{n} c_{il}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ja}^b c_{kb}^p = 0, \tag{1}$$

para todos $i, j, k, l, p \in \{1, \ldots, n\}$.

Deformações

Seja V um **k**-espaço vetorial com base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Queremos introduzir uma estrutura de álgebra de Jordan em V.

Especificamos n^3 **constantes estruturais** $c_{ij}^k \in \mathbf{k}$, tais que:

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k, \text{ para todo } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

A álgebra é comutativa, logo $c_{ij}^k = c_{ji}^k$ e satisfaz a identidade de Jordan, logo:

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^{n} c_{ij}^a \sum_{b=1}^{n} c_{kl}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^{n} c_{kl}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ja}^b c_{ib}^p + \sum_{a=1}^{n} c_{lj}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ki}^b c_{ab}^p - \\ &- \sum_{a=1}^{n} c_{ki}^a \sum_{b=1}^{n} c_{la}^b c_{lb}^p + \sum_{a=1}^{n} c_{kj}^a \sum_{b=1}^{n} c_{il}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^{n} c_{il}^a \sum_{b=1}^{n} c_{ja}^b c_{kb}^p = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

para todos $i,\ j,\ k,\ l,\ p \in \{1, \ldots, n\}$.

O espaço das constantes estruturais define uma **variedade algébrica** em $\mathbf{k}^{n^3}$ que chamaremos de $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$.

O grupo $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ age em $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$ via "**mudança de base**"

$$\mathrm{G} \times \mathcal{J}\mathrm{or}_n \to \mathcal{J}\mathrm{or}_n$$
$$(g, (\mathcal{J}, \cdot)) \mapsto (\mathcal{J}, \cdot_g), \text{ onde } x \cdot_g y = g(g^{-1}x \cdot g^{-1}y), \qquad (2)$$

Denotaremos por $\mathcal{J}^G$ à G**-órbita** de uma álgebra $\mathcal{J}$, logo:

$$\mathcal{J} \simeq \mathcal{J}_1 \text{ se e somente se } \mathcal{J}^{\mathrm{G}} = \mathcal{J}_1^{\mathrm{G}}.$$

O espaço das constantes estruturais define uma **variedade algébrica** em $\mathbf{k}^{n^3}$ que chamaremos de $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$.

O grupo $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ age em $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$ via "**mudança de base**"

$$\mathrm{G} \times \mathcal{J}\mathrm{or}_n \to \mathcal{J}\mathrm{or}_n$$
$$(g, (\mathcal{J}, \cdot)) \mapsto (\mathcal{J}, \cdot_g), \text{ onde } x \cdot_g y = g(g^{-1}x \cdot g^{-1}y), \tag{2}$$

Denotaremos por $\mathcal{J}^G$ à ***G*-órbita** de uma álgebra $\mathcal{J}$, logo:

$$\mathcal{J} \simeq \mathcal{J}_1 \text{ se e somente se } \mathcal{J}^{\mathrm{G}} = \mathcal{J}_1^{\mathrm{G}}.$$

O espaço das constantes estruturais define uma **variedade algébrica** em $\mathbf{k}^{n^3}$ que chamaremos de $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$.

O grupo $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ age em $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$ via "**mudança de base**"

$$\mathrm{G} \times \mathcal{J}\mathrm{or}_n \to \mathcal{J}\mathrm{or}_n$$
$$(g, (\mathcal{J}, \cdot)) \mapsto (\mathcal{J}, \cdot_g), \text{ onde } x \cdot_g y = g(g^{-1}x \cdot g^{-1}y), \tag{2}$$

Denotaremos por $\mathcal{J}^G$ à *G*-**órbita** de uma álgebra $\mathcal{J}$, logo:

$$\mathcal{J} \simeq \mathcal{J}_1 \text{ se e somente se } \mathcal{J}^{\mathrm{G}} = \mathcal{J}_1^{\mathrm{G}}.$$

Deformações

Definição

Dizemos que $\mathcal{J}_1$ é uma **deformação** de $\mathcal{J}_2$ se $\mathcal{J}_2^G \subseteq \overline{\mathcal{J}_1^G}$.
Notação $\mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$.

Definição

Uma álgebra $\mathcal{J}$ é **rígida** se $\mathcal{J}^G$ é um subconjunto Zariski-aberto em $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$.

Deformações

Definição

Dizemos que $\mathcal{J}_1$ é uma **deformação** de $\mathcal{J}_2$ se $\mathcal{J}_2^G \subseteq \overline{\mathcal{J}_1^G}$.
Notação $\mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$.

Definição

Uma álgebra $\mathcal{J}$ é **rígida** se $\mathcal{J}^G$ é um subconjunto Zariski-aberto em $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$.

Cohomologia

Definição

Uma aplicação bilinear $h : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ que satisfaz

$$h(a,b) = h(b,a)$$

$$(h(a,a)b)a + h(a^2,b)a + h(a^2b,a) = a^2h(b,a) + h(a,a)(ba) + h(a^2,ba)$$

é chamada de 2-**cociclo**. **Notação:** $Z^2(\mathcal{J},\mathcal{J})$.

Definição

Dois 2-cociclos h e h' são **equivalentes** se existe uma aplicação linear $\mu : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ tal que:

$$h'(a,b) = h(a,b) - \mu(ab) + a\mu(b) + \mu(a)b.$$

Chamaremos de 2-**cobordos** aos 2-cociclos equivalentes a 0. **Notação:** $B^2(\mathcal{J},\mathcal{J})$.

Cohomologia

Definição

Uma aplicação bilinear $h : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ que satisfaz

$$h(a,b) = h(b,a)$$

$$(h(a,a)b)a + h(a^2,b)a + h(a^2b,a) = a^2h(b,a) + h(a,a)(ba) + h(a^2,ba)$$

é chamada de 2-**cociclo**. **Notação:** $Z^2(\mathcal{J},\mathcal{J})$.

Definição

Dois 2-cociclos h e h' são **equivalentes** se existe uma aplicação linear $\mu : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ tal que:

$$h'(a,b) = h(a,b) - \mu(ab) + a\mu(b) + \mu(a)b.$$

Chamaremos de 2-**cobordos** aos 2-cociclos equivalentes a 0. **Notação:** $B^2(\mathcal{J},\mathcal{J})$.

Cohomologia

Definição

Definimos o **segundo grupo de cohomologia** de $\mathcal{J}$ como sendo $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = Z^2(\mathcal{J},\mathcal{J})/B^2(\mathcal{J},\mathcal{J})$.

Teorema

[4] Se $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = 0$ então $\mathcal{J}$ é rígida.

Definição

Se $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = 0$ dizemos que $\mathcal{J}$ é **infinitesimalmente rígida**.

Cohomologia

Definição

Definimos o **segundo grupo de cohomologia** de $\mathcal{J}$ como sendo $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = Z^2(\mathcal{J},\mathcal{J})/B^2(\mathcal{J},\mathcal{J})$.

Teorema

[4] Se $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = 0$ então $\mathcal{J}$ é rígida.

Definição

Se $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = 0$ dizemos que $\mathcal{J}$ é **infinitesimalmente rígida**.

Cohomologia

Definição

Definimos o **segundo grupo de cohomologia** de $\mathcal{J}$ como sendo $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = Z^2(\mathcal{J},\mathcal{J})/B^2(\mathcal{J},\mathcal{J})$.

Teorema

[4] Se $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = 0$ então $\mathcal{J}$ é rígida.

Definição

Se $H^2(\mathcal{J},\mathcal{J}) = 0$ dizemos que $\mathcal{J}$ é **infinitesimalmente rígida**.

Componentes Irredutíveis

Teorema

Se $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_n$ é uma álgebra rígida então existe uma componente irredutível $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{J}^{\mathsf{G}}}$.

Teorema

Reciprocamente, se $\mathcal{C}$ é uma componente irredutível de $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$:

1. *ou $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{J}^{\mathsf{G}}}$ onde $\mathcal{J}$ é uma álgebra rígida,*
2. *ou $\mathcal{C} = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{J}_\alpha^{\mathsf{G}}}$ sendo I um conjunto infinito.*

Componentes Irredutíveis

Teorema

Se $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_n$ é uma álgebra rígida então existe uma componente irredutível $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{J}^{\mathsf{G}}}$.

Teorema

Reciprocamente, se $\mathcal{C}$ é uma componente irredutível de $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$:

1. *ou $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{J}^{\mathsf{G}}}$ onde $\mathcal{J}$ é uma álgebra rígida,*
2. *ou $\mathcal{C} = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{J}_\alpha^{\mathsf{G}}}$ sendo I um conjunto infinito.*

Teorema

[13] Seja $\mathcal{C}$ uma componente irredutível de $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$ que é o fecho de uma união infinita de órbitas de álgebras $\mathcal{J}, \mathcal{J}', \ldots$. Se $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{ss} + \mathrm{Rad}\,\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'_{ss} + \mathrm{Rad}\,\mathcal{J}'$, então:

1. $\mathcal{J}_{ss}$ *e* $\mathcal{J}'_{ss}$ *são isomorfas;*
2. $\dim \mathrm{Rad}\,\mathcal{J} = \dim \mathrm{Rad}\,\mathcal{J}'$;
3. $\mathrm{nilindex}(\mathrm{Rad}\,\mathcal{J}) = \mathrm{nilindex}(\mathrm{Rad}\,\mathcal{J}')$;
4. *As ações de* $\mathcal{J}_{ss}$ *e* $\mathcal{J}'_{ss}$ *em* $\mathrm{Rad}\,\mathcal{J}$ *e* $\mathrm{Rad}\,\mathcal{J}'$*, resp., são equivalentes;*
5. $\dim H^q(\mathcal{J}, \mathcal{J}) = \dim H^q(\mathcal{J}', \mathcal{J}')$;
6. $\dim \mathcal{J}^{\mathrm{G}} = \dim \mathcal{J}'^{\mathrm{G}}$.

Existência de Deformação

[8]A existência de uma curva γ em $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$ que mora genericamente numa subvariedade $\mathcal{U}$ e a qual corta $\mathcal{J}^{\mathsf{G}}$ em um ponto especial implica que $\mathcal{J} \in \overline{\mathcal{U}}$ e reciprocamente.

Exemplo

$\mathcal{J}_1$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	$\frac{e_3}{2}$	0
e_2	0	e_2	$\frac{e_3}{2}$	0
e_3	$\frac{e_3}{2}$	$\frac{e_3}{2}$	e_1+e_2	0
e_4	0	0	0	e_4

$\mathcal{J}_{25}$	e_1	e_2	n_1	n_2
e_1	e_1	0	n_1	$\frac{n_2}{2}$
e_2	0	e_2	0	$\frac{n_2}{2}$
n_1	n_1	0	0	0
n_2	$\frac{n_2}{2}$	$\frac{n_2}{2}$	0	n_1

Se $t \neq 0$, a álgebra $\mathcal{J}_t^1$ com base $\{A_t = e_1 + e_4, B_t = e_2, C_t = te_3, D_t = t^2 e_1\}$ e produtos

$$A_t^2 = A_t \quad B_t^2 = B_t \quad C_t^2 = D_t + t^2 B_t \quad D_t^2 = t^2 D_t$$

$$A_t B_t = 0 \quad A_t C_t = \frac{1}{2} C_t \quad A_t D_t = D_t$$

$$B_t C_t = \frac{1}{2} C_t \quad B_t D_t = 0 \quad C_t D_t = \frac{1}{2} t^2 C_t$$

é isomorfa a $\mathcal{J}_1$, i.e., $\mathcal{J}_t \in \mathcal{J}_1^{\mathrm{G}}$. Mas quando $t = 0$ obtemos o produto da álgebra $\mathcal{J}_{25}$. Logo $\mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_{25}$.

Critérios para a não Existência de Deformação

Se $\mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$ então:

1. $\dim \mathcal{J}_1^G > \dim \mathcal{J}_2^G$
2. $\dim \mathrm{Aut}(\mathcal{J}_1) < \dim \mathrm{Aut}(\mathcal{J}_2)$
3. $\dim \mathrm{Rad}(\mathcal{J}_1) \leqslant \dim \mathrm{Rad}(\mathcal{J}_2)$
4. $\dim \mathrm{Ann}(\mathcal{J}_1) \leqslant \dim \mathrm{Ann}(\mathcal{J}_2)$
5. $\dim(\mathcal{J}_1^m) \geqslant \dim(\mathcal{J}_2^m)$
6. $(\mathcal{J}_2)_{ss} \subseteq (\mathcal{J}_1)_{ss}$ e a ação de $(\mathcal{J}_2)_{ss}$ em $\mathcal{J}_2$ é a restrição da ação de $(\mathcal{J}_1)_{ss}$ a $(\mathcal{J}_2)_{ss}$.
7. toda identidade polinomial de $\mathcal{J}_1$ é válida em $\mathcal{J}_2$.

Critérios para a não Existência de Deformação

Se $\mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}_2$ então:

1. $M_I(\mathcal{J}_1) \leqslant M_I(\mathcal{J}_2)$ onde $M_I(\mathcal{J}) = \max\{\dim S \mid S \subseteq \mathcal{J}$ e satisfaz $I\}$.
2. $\dim Z(\mathcal{J}_1) \leqslant \dim Z(\mathcal{J}_2)$ (centro-associador)
3. $\dim Z^2(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_1) \leqslant \dim Z^2(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_2)$
4. $\dim B^2(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_1) \geqslant \dim B^2(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_2)$
5. $\dim H^2(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_1) \leqslant \dim H^2(\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_2)$
6. Se $\mathcal{J}_2$ é unitária então $\mathcal{J}_1$ deve ser unitária.
7. A decomposição de Peirce de $\mathcal{J}_2$ dever ser preservada em $\mathcal{J}_1$.

Teorema

Se $\mathcal{J}$ não admite deformação não trivial então $\mathcal{J}$ é rígida.

Soma Direta de Deformações

Fato

Para $i = 1, 2$ *sejam* $\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_i' \in \mathcal{J}or_{n_i}$ *tal que* $\mathcal{J}_i \to \mathcal{J}_i'$ *então* $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 \to \mathcal{J}_1' \oplus \mathcal{J}_2'$.

Exemplo

A recíproca é falsa: considere as álgebras $\mathcal{J}_{37} = \mathcal{T}_2 \oplus \mathbf{k}n_3$ e $\mathcal{J}_{67} = \mathcal{T}_3 \oplus \mathbf{k}n_4$, onde $\mathcal{T}_2$ é dada por
$e_1 n_1 = n_1 \quad e_1 n_2 = n_2 \quad e_1^2 = e_1$ e $\mathcal{T}_3$ por $n_1 n_2 = n_3 \quad n_1^2 = n_2$.
Temos que $\mathcal{T}_2 \oplus \mathbf{k}n_3 \to \mathcal{T}_3 \oplus \mathbf{k}n_4$. Mas $\mathcal{T}_2 \not\to \mathcal{T}_3$ pois

$$\dim \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_2) = 4 > 3 = \dim \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_3).$$

Soma Direta de Deformações

Fato

Para $i = 1, 2$ *sejam* $\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_i' \in \mathcal{J}or_{n_i}$ *tal que* $\mathcal{J}_i \to \mathcal{J}_i'$ *então* $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 \to \mathcal{J}_1' \oplus \mathcal{J}_2'$.

Exemplo

A recíproca é falsa: considere as álgebras $\mathcal{J}_{37} = \mathcal{T}_2 \oplus \mathbf{k}n_3$ e $\mathcal{J}_{67} = \mathcal{T}_3 \oplus \mathbf{k}n_4$, onde $\mathcal{T}_2$ é dada por
$e_1 n_1 = n_1 \quad e_1 n_2 = n_2 \quad e_1^2 = e_1$ e $\mathcal{T}_3$ por $n_1 n_2 = n_3 \quad n_1^2 = n_2$.
Temos que $\mathcal{T}_2 \oplus \mathbf{k}n_3 \to \mathcal{T}_3 \oplus \mathbf{k}n_4$. Mas $\mathcal{T}_2 \not\to \mathcal{T}_3$ pois

$$\dim \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_2) = 4 > 3 = \dim \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_3).$$

Rigidez é um Conceito Local

Exemplo

De [2] as álgebras $\mathcal{J}_{61}$ e $\mathcal{J}_{62}$ são rígidas em $\mathcal{J}\mathrm{or}_4 \bigcap \mathrm{Nil}_4$. Mas, $\mathcal{J}_{47} \to \mathcal{J}_{61}$ logo $\mathcal{J}_{61}$ não é rígida em Assoc_4. Por outro lado $\mathcal{J}_{53} \to \mathcal{J}_{62}$ logo $\mathcal{J}_{62}$ não é rígida em $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$.

Algumas Componentes Irredutíveis

1. Para $m \geqslant 2$, a álgebra $A_m \in \mathcal{J}\mathrm{or}_m$ que possui base $\{e_1, n_1, \cdots, n_{m-1}\}$ tal que $e_1^2 = e_1$, $e_1 n_i = \frac{1}{2} n_i$ é rígida e $\dim A_m^{\mathrm{G}} = m$.

2. Para $m \geqslant 4$, a álgebra $B_m \in \mathcal{J}\mathrm{or}_m$ que possui base $\{e_1, e_2, n_1, \cdots, n_{m-2}\}$ tal que $e_i^2 = e_i$, $e_1 n_j = \frac{1}{2} n_j$, $e_2 n_1 = \frac{1}{2} n_1$ é rígida e $\dim B_m^{\mathrm{G}} = 7 + 5(m-3)$.

3. Para $m \geqslant 4$, a álgebra $C_m \in \mathcal{J}\mathrm{or}_m$ que possui base $\{e_1, e_2, n_1, \cdots, n_{m-2}\}$ tal que $e_i^2 = e_i$, $e_1 n_j = \frac{1}{2} n_j$, $e_2 n_k = \frac{1}{2} n_k$ para $k = 2, \cdots, m-2$ é rígida e $\dim C_m^{\mathrm{G}} = 7 + 5(m-3)$.

Operações que Preservam Rigidez

1. $\mathcal{J}$ é rígida $\Leftrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathbf{k}} L$ é rígida para toda extensão L de $\mathbf{k}$.

2. Soma direta preserva rigidez infinitesimal e reciprocamente se $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$ é infinitesimalmente rígida então $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$ também o são.

3. Soma direta de álgebras rígidas é uma álgebra rígida em $\mathcal{J}\mathrm{or}_n$ para $n \leqslant 5$.

4. Se $\overline{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$ e $\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$ é rígida então $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$ devem ser rígidas.

Rigidez não é preservada por adjunção formal de um elemento identidade.

Sejam $A^{\#}_{n-1} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_n$ a álgebra que resulta de adjuntar formalmente uma unidade a A_{n-1} e $\mathcal{J}(V, f) \in \mathcal{J}\mathrm{or}_n$ álgebra de Jordan da forma bilinear simétrica $f : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbf{k}$, $f(e_i, e_i) = 1$ e $f(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$ e $2 \leqslant i, j \leqslant n$, onde $\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{V} = n - 1$. Então a curva:

$$E_1^t = e_1$$
$$E_2^t = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$$
$$E_i^t = te_i \quad i = 3, \cdots, n$$

implica que $\mathcal{J}(V, f) \to A^{\#}_{n-1}$.

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$

Teorema

A variedade $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$ *é uma variedade afim conexa de dimensão* 16 *com* 73 G*-órbitas e* 10 *componentes irredutíveis dadas pelos fechos de Zariski das órbitas das álgebras*

$$\Omega = \{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_6, \mathcal{J}_{12}, \mathcal{J}_{13}, \mathcal{J}_{16}, \mathcal{J}_{24}, \mathcal{J}_{33}, \mathcal{J}_{59}\},$$

as quais determinam componentes de dimensões: 15, 11, 16, 14, 10, 12, 12, 14, 4 *e* 12, *respetivamente.*

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$

- De [14] segue que existem 73 álgebras de Jordan de dimensão 4 não isomorfas, $\mathcal{J}_i$ com $i = 1, \ldots, 73$. Logo $\mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \bigcup_{i=1}^{73} \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}}$.

- $\dim \mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \max_{1 \leqslant i \leqslant 73} \left\{ \dim \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}} \right\} = \dim \mathcal{J}_3^{\mathrm{G}} = 16.$

- A órbita de $\mathcal{J}_{73} = \oplus_{i=1}^{4} \mathbf{k} n_i$ (álgebra nula) é fechada e logo toda $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma deformação de $\mathcal{J}_{73}$ o que implica que $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma variedade afim conexa.

- As 10 álgebras em Ω tem segundo grupo de cohomologia nulo, logo são rígidas.

- As 63 álgebras restantes deformam-se em alguma das álgebras rígidas.

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$

- De [14] segue que existem 73 álgebras de Jordan de dimensão 4 não isomorfas, $\mathcal{J}_i$ com $i = 1, \ldots, 73$. Logo $\mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \bigcup_{i=1}^{73} \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}}$.

- $\dim \mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \max_{1 \leqslant i \leqslant 73} \left\{ \dim \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}} \right\} = \dim \mathcal{J}_3^{\mathrm{G}} = 16$.

- A órbita de $\mathcal{J}_{73} = \oplus_{i=1}^{4} \mathbf{k} n_i$ (álgebra nula) é fechada e logo toda $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma deformação de $\mathcal{J}_{73}$ o que implica que $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma variedade afim conexa.

- As 10 álgebras em Ω tem segundo grupo de cohomologia nulo, logo são rígidas.

- As 63 álgebras restantes deformam-se em alguma das álgebras rígidas.

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$

- De [14] segue que existem 73 álgebras de Jordan de dimensão 4 não isomorfas, $\mathcal{J}_i$ com $i = 1, \ldots, 73$. Logo $\mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \bigcup_{i=1}^{73} \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}}$.

- $\dim \mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \max_{1 \leqslant i \leqslant 73} \left\{ \dim \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}} \right\} = \dim \mathcal{J}_3^{\mathrm{G}} = 16$.

- A órbita de $\mathcal{J}_{73} = \oplus_{i=1}^{4} \mathbf{k} n_i$ (álgebra nula) é fechada e logo toda $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma deformação de $\mathcal{J}_{73}$ o que implica que $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma variedade afim conexa.

- As 10 álgebras em Ω tem segundo grupo de cohomologia nulo, logo são rígidas.

- As 63 álgebras restantes deformam-se em alguma das álgebras rígidas.

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$

- De [14] segue que existem 73 álgebras de Jordan de dimensão 4 não isomorfas, $\mathcal{J}_i$ com $i = 1, \ldots, 73$. Logo $\mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \bigcup_{i=1}^{73} \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}}$.

- $\dim \mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \max_{1 \leqslant i \leqslant 73} \left\{ \dim \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}} \right\} = \dim \mathcal{J}_3^{\mathrm{G}} = 16$.

- A órbita de $\mathcal{J}_{73} = \oplus_{i=1}^{4} \mathbf{k} n_i$ (álgebra nula) é fechada e logo toda $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma deformação de $\mathcal{J}_{73}$ o que implica que $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma variedade afim conexa.

- As 10 álgebras em Ω tem segundo grupo de cohomologia nulo, logo são rígidas.

- As 63 álgebras restantes deformam-se em alguma das álgebras rígidas.

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$

- De [14] segue que existem 73 álgebras de Jordan de dimensão 4 não isomorfas, $\mathcal{J}_i$ com $i = 1, \ldots, 73$. Logo $\mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \bigcup_{i=1}^{73} \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}}$.

- $\dim \mathcal{J}\mathrm{or}_4 = \max_{1 \leqslant i \leqslant 73} \left\{ \dim \mathcal{J}_i^{\mathrm{G}} \right\} = \dim \mathcal{J}_3^{\mathrm{G}} = 16$.

- A órbita de $\mathcal{J}_{73} = \oplus_{i=1}^{4} \mathbf{k} n_i$ (álgebra nula) é fechada e logo toda $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma deformação de $\mathcal{J}_{73}$ o que implica que $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$ é uma variedade afim conexa.

- As 10 álgebras em Ω tem segundo grupo de cohomologia nulo, logo são rígidas.

- As 63 álgebras restantes deformam-se em alguma das álgebras rígidas.

A variedade Algébrica $\mathcal{J}or_4$

$\rightarrow$	$\mathcal{J}_{10}$	$\mathcal{J}_{11}$	$\mathcal{J}_{12}$	$\mathcal{J}_{13}$	$\mathcal{J}_{14}$	$\mathcal{J}_{15}$	$\mathcal{J}_{16}$	$\mathcal{J}_{17}$
$\mathcal{J}_{10}$	$\rightarrow_{DT}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Ann}}$	$\not\rightarrow_{\mathcal{J}^2}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Ann}}$	$\not\rightarrow_{Z}$	$\not\rightarrow_{\mathcal{J}^2}$
$\mathcal{J}_{11}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\rightarrow_{DT}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Ann}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Ann}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathcal{J}^2}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Ann}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$
$\mathcal{J}_{12}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\rightarrow_{DT}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$
$\mathcal{J}_{13}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{Z^2}$	$\rightarrow_{DT}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$
$\mathcal{J}_{14}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{Z}$	$\not\rightarrow_{Z^2}$	$\rightarrow_{DT}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{Z}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$
$\mathcal{J}_{15}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{Z^2}$	$\not\rightarrow_{Z}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\rightarrow_{DT}$	$\not\rightarrow_{Z^2}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$
$\mathcal{J}_{16}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{Z^2}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\rightarrow_{DT}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$
$\mathcal{J}_{17}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{Z}$	$\not\rightarrow_{Z^2}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{Z}$	$\rightarrow_{DT}$
$\mathcal{J}_{18}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$	$\not\rightarrow_{\mathrm{Aut}}$

Tabela: Existência de deformações em $\mathcal{J}or_4$

Figura: Descrição das componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}_4$

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$

Teorema

A variedade $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ *é uma variedade afim conexa com um número infinito de* G*-órbitas e* 5 *componentes irredutíveis dadas pelos fechos de Zariski das órbitas das álgebras rígidas* $\Omega = \{\mathcal{A}_{23}, \mathcal{A}_{24}, \mathcal{A}_{42}, \tau_5\}$ *e pelo fecho da união infinita de* $\mathcal{A}_{30}(\alpha, \beta)^G$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$*.*

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$

- $\oplus_{i=1}^{5}\mathbf{k}n_i \in \mathcal{J}\mathrm{orN}_5$, logo toda $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ é uma deformação de $\oplus_{i=1}^{5}\mathbf{k}n_i$ o que implica que $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ é uma variedade afim conexa.

- Existem 25 álgebras de Jordan nilpotentes associativas de dimensão 5 não isomorfas, [15], 41 não associativas e 5 classes de álgebras que contêm um número infinito de álgebras não isomorfas, [16], a saber:

A variedade Algébrica $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$

- $\oplus_{i=1}^{5}\mathbf{k}n_i \in \mathcal{J}\mathrm{orN}_5$, logo toda $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ é uma deformação de $\oplus_{i=1}^{5}\mathbf{k}n_i$ o que implica que $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ é uma variedade afim conexa.

- Existem 25 álgebras de Jordan nilpotentes associativas de dimensão 5 não isomorfas, [15], 41 não associativas e 5 classes de álgebras que contêm um número infinito de álgebras não isomorfas, [16], a saber:

Famílias Infinitas de Álgebras não Isomorfas

$\mathcal{A}$	Tabela de Multiplicação	Observação
$\mathcal{A}_{17}(\alpha)$	$n_1^2 = n_2 \quad n_1 n_2 = n_3 \quad n_4^2 = \alpha n_5$ $n_1 n_3 = n_2^2 = n_2 n_4 = n_5$	$\mathcal{A}_{17}(\alpha_1) \simeq \mathcal{A}_{17}(\alpha_2)$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$
$\mathcal{A}_{26}(\alpha)$	$n_1^2 = n_3 \quad n_2 n_3 = \alpha n_5 \quad n_1 n_2 = n_4$ $n_1 n_3 = n_2 n_4 = n_5$	$\mathcal{A}_{26}(\alpha_1) \simeq \mathcal{A}_{26}(\alpha_2)$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = \pm\alpha_2$
$\mathcal{A}_{27}(\alpha)$	$n_1^2 = n_3 \quad n_1 n_4 = \alpha n_5$ $n_2 n_3 = n_5 \quad n_1 n_2 = n_4$	$\mathcal{A}_{27}(\alpha_1) \simeq \mathcal{A}_{27}(\alpha_2)$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ $\mathcal{A}_{27}(1)$ associativa
$\mathcal{A}_{29}(\alpha)$	$n_1^2 = n_3 \quad n_2^2 = n_4 \quad n_2 n_4 = \alpha n_5$ $n_1 n_3 = n_1 n_4 = n_5$	$\mathcal{A}_{29}(\alpha_1) \simeq \mathcal{A}_{29}(\alpha_2)$ $\Leftrightarrow \alpha_1 = \pm\alpha_2$
$\mathcal{A}_{30}(\alpha, \beta)$	$n_1^2 = n_3 \quad n_2^2 = n_4 \quad n_2 n_4 = \alpha n_5$ $n_1 n_3 = \beta n_5 \quad n_2 n_3 = n_1 n_4 = n_5$	$\mathcal{A}_{30}(\alpha_1, \beta_1) \simeq \mathcal{A}_{30}(\alpha_2, \beta_2)$ $\Leftrightarrow (\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ ou $(\alpha_1, \beta_1) = (\beta_2, \alpha_2)$

Tabela: Famílias Infinitas em $\mathcal{J}\mathrm{or}\mathrm{N}_5$

- As famílias $\mathcal{A}_{17}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{26}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{27}(\alpha)$ e $\mathcal{A}_{29}(\alpha)$ não definem componente irredutível.
- Temos 62 álgebras em $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ que não são rígidas.
- As álgebras $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{24}$, $\mathcal{A}_{42}$ e τ_5 não admitem deformações não triviais.
- A família infinita $\mathcal{A}_{30}(\alpha, \beta)$ com $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$ gera uma componente irredutível.

- As famílias $\mathcal{A}_{17}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{26}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{27}(\alpha)$ e $\mathcal{A}_{29}(\alpha)$ não definem componente irredutível.
- Temos 62 álgebras em $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ que não são rígidas.
- As álgebras $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{24}$, $\mathcal{A}_{42}$ e τ_5 não admitem deformações não triviais.
- A família infinita $\mathcal{A}_{30}(\alpha, \beta)$ com $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$ gera uma componente irredutível.

- As famílias $\mathcal{A}_{17}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{26}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{27}(\alpha)$ e $\mathcal{A}_{29}(\alpha)$ não definem componente irredutível.
- Temos 62 álgebras em $\mathcal{J}\mathrm{or}\mathrm{N}_5$ que não são rígidas.
- As álgebras $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{24}$, $\mathcal{A}_{42}$ e τ_5 não admitem deformações não triviais.
- A família infinita $\mathcal{A}_{30}(\alpha, \beta)$ com $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$ gera uma componente irredutível.

- As famílias $\mathcal{A}_{17}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{26}(\alpha)$, $\mathcal{A}_{27}(\alpha)$ e $\mathcal{A}_{29}(\alpha)$ não definem componente irredutível.
- Temos 62 álgebras em $\mathcal{J}\mathrm{orN}_5$ que não são rígidas.
- As álgebras $\mathcal{A}_{23}$, $\mathcal{A}_{24}$, $\mathcal{A}_{42}$ e τ_5 não admitem deformações não triviais.
- A família infinita $\mathcal{A}_{30}(\alpha, \beta)$ com $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$ gera uma componente irredutível.

Figura: Descrição das componentes de $\mathcal{J}\mathrm{or}\mathrm{N}_5$

Comparação das Variedades $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^{\mathbb{C}}$ e $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^{\mathbb{R}}$

	$\mathcal{J}\mathrm{or}_n^{\mathbb{R}}$		$\mathcal{J}\mathrm{or}_n^{\mathbb{C}}$	
n	nº órbitas	nº componentes	nº órbitas	nº componentes
1	2	1	2	1
2	7	3	6	2
3	26	8	20	5
4	> 109	$\geqslant 18$	73	10
5	-	-	∞	$\geqslant 26$

Tabela: Comparação das variedades $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^{\mathbb{C}}$ e $\mathcal{J}\mathrm{or}_n^{\mathbb{R}}$

ANCOCHEA BERMÚDEZ, J. M. et al.; *Contractions d'algèbres de Jordan en dimension* 2. J. of Alg. 319, 2008.

ANCOCHEA BERMÚDEZ, J. M. et al.; *Contractions of Low-Dimensional Nilpotent Jordan Algebras*. Com. in Alg. 39, 2011.

GABRIEL, P.; *Finite Representation Type is Open*. Lct. Notes in Math., 488, 1975.

GERSTENHABER, M.; *On the Deformation of Rings and Algebras*. Ann. of Math., 79, 1964.

KASHUBA, I.; SHESTAKOV, I.; *Jordan Algebras of Dimension* 3*: Geometric Classification and Representation Type*. Bibl. de la Rev. Mat. Iber. 2005.

KASHUBA, I.; *Variety of Jordan Algebras in Small Dimensions*. Alg. and Dis. Math., 2, 2006.

KIRILLOV, A. A.; NERETIN YU, A.; *The variety A_n of n-dimensional Lie algebra structures*. Transl. II Ser, Am. Math. Soc. 137, 1987.

MAZZOLA, G.; *The Algebraic and Geometric Classification of Associative Algebras of Dimension* 5. Man. Math., 27, 1979.

NIJENHUIS, A.; RICHARDSON, R.; *Commutative algebra cohomology and deformations of Lie and associative algebras*. J. Alg., 9, 1968.

KASHUBA, I.; MARTIN, M. E.; *Deformations of Jordan Algebras of Dimension* 4. J. of Alg., 399, 2014.

KASHUBA, I.; MARTIN, M. E.; *The Variety of* 3*-dimensional Real Jordan Algebras*. J. of Alg. and its App., 1650158, 2015.

FLANIGAN, F.; *Algebraic Geography: Varieties of Structure Constants*. Pacific J. of Math., 27, 1968.

MARTIN, M. E; 4*-Dimensional Jordan Algebras*. Int. J. of Math., Game Th. and Alg., 20, 2013.

MAZZOLA, G; *Generic Finite Schemes and Hochschild Cocycles.* Comm. Math. Helv., 55, 1980.

HEGAZI, A; ABDELWAHAB, H; *Classification of* 5*-dimensional nilpotent Jordan algebras*. arXiv:1401.3992, 2014.